УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
Д.А Зубцов
10 декабря 2013 г.

П Р О Г Р А М М А

по дисциплине: **Теоретическая механика**
по направлению подготовки 010900 «Прикладные математика и физика»
факультет: **ФОПФ**
кафедра : **теоретической механики**
курс: **II**
семестр: **4**
Трудоёмкость: обязательная часть – зач.ед.−2
вариативная часть – зач. ед.−1
дополн. за сложность –1
лекции – 34 часа — Экзамен – 4 семестр
практические (семинарские)
занятия – 34 часа — Зачет – нет
лабораторные занятия – нет — количество заданий – 2
Самостоятельная работа – 1 час в неделю
ВСЕГО ЧАСОВ – 68

Программу составил: д.ф.-м.н., проф. А.П. Маркеев

Задания составил д.ф.-м.н., проф. А.П. Маркеев

Программа принята на заседании
кафедры теоретической механики
19 ноября 2013 года

Заведующий кафедрой д.ф.-м.н., проф. А.П. Иванов

1. **Устойчивость равновесия. Малые колебания**

   1.1. Общие понятия об устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости равновесия. Теорема Лагранжа об устойчивости положения равновесия консервативной системы. Теоремы Ляпунова об обращении теоремы Лагранжа (без доказательства).

   1.2. Теорема Ляпунова об устойчивости движения по первому приближению (без доказательства).

   1.3. Критерий Рауса–Гурвица.

   1.4. Линеаризация уравнений движения в окрестности положения равновесия. Нормальные координаты и нормальные колебания.

   1.5. Колебания консервативной системы под действием внешних периодических сил. Резонанс.

   1.6. Малые колебания склерономной системы под действием сил, не зависящих явно от времени.

   1.7. Влияние внешних периодических сил на малые колебания склерономной системы. Амплитудно-фазовая характеристика.

2. **Дифференциальные уравнения аналитической динамики (продолжение)**

   2.1. Обобщенные импульсы. Преобразование Лежандра. Теорема Донкина о преобразовании Лежандра. Канонические уравнения Гамильтона. Физический смысл функции Гамильтона. Интеграл Якоби. Время и энергия как канонически сопряженные переменные. Понижение порядка системы дифференциальных уравнений Гамильтона в случае существования циклических координат.

   2.2. Уравнения Уиттекера и Якоби для консервативных и обобщенно-консервативных систем.

   2.3. Уравнения Рауса: функция Рауса, уравнения Рауса.

   2.4. Понижение порядка системы дифференциальных уравнений движения при помощи уравнений Рауса в случае существования циклических координат. Приведенный потенциал.

   2.5.Скобки Лагранжа. Скобки Пуассона и их свойства. Скобки Пуассона и первые интегралы. Теорема Якоби–Пуассона.

3. **Канонические преобразования**

   3.1. Понятие канонического преобразования. Обобщенная симплектичность матрицы Якоби – необходимое и достаточное условие каноничности преобразования. Другие критерии каноничности преобразования (выражение их через скобки Лагранжа, через скобки Пуассона, посредством дифференциальной формы).

3.2. Инвариантность скобок Пуассона при канонических преобразованиях. Канонические преобразования и процесс движения.

3.3. Теорема Лиувилля о сохранении фазового объёма.

3.4. Свободное каноническое преобразование и его производящая функция. Понятие о других типах производящих функций.

4. Метод Якоби интегрирования уравнений динамики

4.1. Уравнение Гамильтона–Якоби. Полный интеграл. Теорема Якоби.

4.2. Уравнение Гамильтона–Якоби для систем с циклическими координатами. Уравнение Гамильтона–Якоби для консервативных и обобщенно-консервативных систем. Разделение переменных.

4.3. Теорема Лиувилля об интегрируемости гамильтоновой системы в квадратурах.

5. Интегральные инварианты

5.1. Понятие интегрального инварианта.

5.2. Универсальный интегральный инвариант Пуанкаре. Теорема, обратная теореме об универсальном интегральном инварианте Пуанкаре. Теорема Ли Хуа-чжуна (без доказательства).

5.3. Интегральный инвариант Пуанкаре–Картана (основной интегральный инвариант механики). Теорема, обратная теореме об интегральном инварианте Пуанкаре – Картана.

6. Интегральные вариационные принципы

6.1. Принцип Гамильтона–Остроградского: прямой и окольный пути голономной системы, принцип Гамильтона–Остроградского, случай потенциального поля, действие по Гамильтону, понятие о характере экстремума действия по Гамильтону.

6.2. Замена переменных в уравнениях Лагранжа. Теорема Нетер. Связь законов сохранения (первых интегралов) со свойствами пространства и времени.

6.3. Принцип Мопертюи–Лагранжа: изоэнергетическое варьирование, принцип Мопертюи–Лагранжа, понятие о характере экстремума действия по Лагранжу. Сопоставление оптического принципа Ферма и принципа Мопертюи–Лагранжа.

Дополнительные темы для программы повышенного уровня

1. Электромеханические аналогии

1.1. Электрические аналоги кинетической энергии, потенциальной энергии и диссипативной функции Релея.

1.2. Уравнения Лагранжа для электрических цепей и электромеханических систем.

2. Устойчивость движения

2.1. Основные понятия и определения.

2.2. Теоремы Ляпунова об устойчивости и асимптотической устойчивости.

2.3. Теоремы Ляпунова и Четаева о неустойчивости.

2.4. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению (случай установившихся движений). Понятие о критических случаях в теории устойчивости.

2.5. Решение задачи об устойчивости перманентных вращений твердого тела в случае Эйлера. Условие Маиевского–Четаева устойчивости «спящего» волчка Лагранжа.

2.6. Влияние диссипативных и гироскопических сил на устойчивость равновесия консервативной системы.

3. Переменные действие–угол и адиабатические инварианты

3.1. Переменные действие–угол для системы с одной степенью свободы. Понятие о переменных действие–угол для систем с n степенями свободы.

3.2. Адиабатические инварианты.

4. Канонические преобразования в теории возмущений

4.1. Вариация постоянных в задачах механики.

4.2. Канонические замены переменных, близкие к тождественным.

4.3. Классическая теория возмущений для систем, близких к интегрируемым. Малые знаменатели.

Литература

Основная

1. *Айзерман М.А.* Классическая механика. – М.: Наука, 2005.
2. *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике. – М.: Физматлит, 2001.
3. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. – М.– Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007.
4. *Трухан Н.М.* Теоретическая механика. Методика решения задач: учеб. пособие. – М.: МФТИ, 2010.

Дополнительная

5. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика – М.: Наука, 1973.
6. *Голдстейн Г. Пул Ч., Сафко Дж.* Классическая механика – М. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2012.
7. *Сайт* http://teormech.fizteh.ru

З А Д А Н И Я

П Е Р В О Е З А Д А Н И Е

(срок сдачи с 24 по 29 марта 2014 г.)

Контрольная работа № 1 с 17 по 22 марта 2014

1. Консервативные системы

а) устойчивость равновесия

С – 15.15, М – 53.12, 53.14

б) малые колебания консервативных систем

С – 16.12, 16.71, 16.68, 16.70, 16.72

Т1. Кинетическая и потенциальная энергия материальной системы с тремя степенями свободы задаются формулами

$$T = \frac{1}{2}(3\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2 + 4\dot{q}_1\dot{q}_2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_3 + 2\dot{q}_2\dot{q}_3),$$

$$\Pi = \frac{1}{2}(6q_1^2 + 5q_2^2 + 4q_3^2 + 10q_1q_2 + 8q_1q_3 + 8q_2q_3)$$

Найти частоты колебаний системы, выписать общее решение уравнений движения и матрицу перехода к нормальным координатам.

2. Диссипативные системы и вынужденные колебания

а) асимптотическая устойчивость

С – 17.7, 17.11(г), 17.30

б) вынужденные колебания

С – 18.25, 18.41, 18.43(е)

В Т О Р О Е З А Д А Н И Е

(срок сдачи с 19 по 24 мая 2014 г.)

Контрольная работа № 2 с 12 по 17 мая 2014 г.

1. Функция Гамильтона и канонические уравнения. Уравнения Рауса

С – 19.5, 19.16, 19.19, 19.32, 19.51, 19.67, 19.75, М – 49.4

2. Первые интегралы. Скобки Пуассона

С – 20.10, 20.23, 20.28(б), 20.57

Т2. Доказать, что значение любой функции координат и импульсов системы $F(q(t),p(t))$ выражается через значения q и p в момент t = 0 формулой (ряд предполагается сходящимся)

$$F(q(t),p(t)) = F + \frac{t}{1!}(F,H) + \frac{t^2}{2!}((F,H),H) +$$

$$+\frac{t^3}{3!}(((F,H),H),H) + \ldots,\ (F = F(q(0),p(0)),\ H = H(q(0),p(0))).$$

Вычислить при помощи этой формулы функции $q(t)$,p(t), удовлетворяющие уравнениям движения: а) материальной точки в однородном поле тяжести и б) гармонического осциллятора.

3. Канонические преобразования

С – 23.8, 23.21, 23.36, 23.98, 23.109

Т3. Функция Гамильтона математического маятника записана в виде

$$H = \frac{1}{2}p^2 - \cos q\,.$$

Записать ее в новых канонически сопряженных переменных Q, P, введя их так, чтобы старая и новая координаты были связаны равенством $Q = \cos q$.

4. Уравнение Гамильтона–Якоби

С – 24.3, 24.14, 24.34, 24.53, 24.88

5. Интегральные инварианты

С – 22.2, 22.6, 22.9, 22.21, 22.24

6. Интегральные вариационные принципы механики

С – 21.7, 21.8, 21.36, 21.42

Т4. В системе, уравнение движения которой задается функцией Лагранжа $L = -\sqrt{1-(dq/dt)^2}$, делается переход к новым переменным q_*, t_* по формулам (s – параметр)

$$q = ch(sq_*) + sh(st_*)\ , \qquad t = sh(sq_*) + ch(st_*)$$

Показать, что функция Лагранжа преобразованной системы имеет вид

$$L_* = -\sqrt{1-\left(dq_*/dt_*\right)^2}$$

Т5. Частица массы m, движущаяся в потенциальном поле, обладает потенциальной энергией $\Pi = -Fx$ ($F - const$). За время τ частица перемещается из точки $x = 0$ в точку $x = d$. Найти закон движения частицы, предполагая, что он имеет вид $x(t) = at^2 + bt + c$, и подбирая постоянные параметры a, b, c так, чтобы действие по Гамильтону имело наименьшее значение.

7. Теорема Э. Нётер

Т6. При помощи теоремы Нетер найти первые интегралы уравнений движения волчка из задачи С – 12.56.

Т7. В задаче Т4 предыдущего раздела указать, опираясь на теорему Нетер, первый интеграл, отвечающий указанному там преобразованию, не меняющему вид функции Лагранжа.

Т8. Заряженная частица массы m движется в плоскости Oxy в силовом поле диполя. Потенциальная энергия частицы задается формулой

$$\Pi = \frac{kx}{(x^2 + y^2)^{3/2}},$$

где k – постоянная величина. Делается преобразование подобия

$$x = \alpha\, x_*, \qquad y = \alpha\, y_*, \qquad t = \beta\, t_*.$$

Подобрать постоянные коэффициенты α, β так, чтобы это преобразование не изменяло функцию Лагранжа. При помощи теоремы Нетер указать соответствующий интеграл уравнений движения частицы.

Вариативная часть задания

1. Электромеханические аналогии

С – 13.4(б), 13.33; М. 48.52

2. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости движения

Т9. Тонкий однородный диск радиуса R вращается вокруг вертикального диаметра с угловой скоростью ω. Нижняя точка диска соприкасается с неподвижной абсолютно гладкой горизонтальной плоскостью. Показать, что если $\omega^2 \ge 4g / R$, то вращение диска устойчиво.

Т10. Уравнения возмущенного движения некоторой материальной системы имеют вид

$$\frac{dx_1}{dt} = -2x_2 - x_1(x_1^{2014} + x_2^{2014}),$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 2x_1 - x_2(x_1^{2014} + x_2^{2014}).$$

Доказать асимптотическую устойчивость невозмущенного движения.

Указание. Воспользоваться теоремой Ляпунова об асимптотической устойчивости, приняв в качестве функции Ляпунова функцию $V = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$.

T11. Уравнения возмущенного движения некоторой материальной системы имеют вид

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = x_1^2 + x_2^2$$

Доказать неустойчивость невозмущенного движения.

Указание. Воспользоваться теоремой Четаева о неустойчивости, приняв в качестве функции Четаева функцию $V = x_1 x_2$, а в качестве области $V > 0$ - область $x_1 > 0, x_2 > 0$.

3. **Переменные действие–угол и адиабатические инварианты**

T12. Материальная точка единичной массы совершает одномерное колебательное движение в потенциальном силовом поле. Потенциальная энергия точки $\Pi(q)$ задается формулой

$\Pi = tg^2(\alpha q)$ (α – постоянный положительный параметр).

Показать, что в переменных действие–угол I, w функция Гамильтона точки записывается в виде

$$H = \frac{1}{2}(\alpha I + \sqrt{2})^2 - 1.$$

T13. Как изменяются частота и амплитуда колебаний точки из задачи T12 , если параметр α – медленно возрастающая функция времени ($\alpha = \alpha\,(\varepsilon\, t\,)$).

4. Канонические преобразования в теории возмущений

Т14. Движение математического маятника при больших значениях постоянной интеграла энергии мало отличается от равномерного вращения и в безразмерных переменных может быть описано каноническими дифференциальными уравнениями с функцией Гамильтона

$$H = \frac{1}{2} p^2 - \varepsilon \cos q \quad (0 < \varepsilon << 1).$$

При помощи классической теории возмущений найти близкую к тождественной каноническую замену переменных q, p к новым переменным Q, P, уничтожающую в новой функции Гамильтона члены порядка ε. Выписать решение $Q(t), P(t)$ полученной таким путем новой системы дифференциальных уравнений движения.

С – *Пятницкий Е.С., Трухан Н.М., Ханукаев Ю.И., Яковенко Г.Н.* Сборник задач по аналитической механике. – 2-е изд. М.: Наука, 1996. 3-е изд. М : Физматлит, 2002.
М – *Мещерский И.В.* Сборник задач по теоретической механике. – 48-е изд. СПб. Лань, 2008.

Усл.печ.л. 0.75. Тираж 120 экз.