УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
Д.А. Зубцов
10 декабря 2013 г.

П Р О Г Р А М М А

по дисциплине: **Теоретическая механика**

по направлению подготовки 010900 «Прикладные математика и физика»

факультет: **ФРТК, ФАКИ, ФМХФ, ФФКЭ, ФАЛТ, ФУПМ, ФПФЭ, ФИВТ, ФБМФ**

кафедра: **теоретической механики**

курс: **II**

семестр: **4**

Трудоемкость: обязательная часть – зач.ед. – 2

вариативная часть – зач.ед. – 1

дополн. за сложность – 1

лекции – 34 часа Экзамен – 4 сем.

практические (семинарские)

занятия – 34 часа Зачет – нет

лабораторные занятия – нет количество заданий – 2

Самостоятельная работа – 1 час в неделю

ВСЕГО ЧАСОВ – 68

Программу составили: д.ф.-м.н., проф. А.П. Иванов,

д.ф.-м.н., проф. Н.И. Амелькин, к.ф.-м.н., доц. А.В. Фомичёв,

д.ф.-м.н., проф. О.В. Холостова

Задания составил к.ф.-м.н., доц. А.В. Фомичёв

Программа принята на заседании

кафедры теоретической механики 19 ноября 2013 года

Заведующий кафедрой д.ф.-м.н., проф. А.П. Иванов

1. **Равновесие, устойчивость, движение вблизи устойчивого равновесия**

   Определение положения равновесия. Условия равновесия системы с идеальными связями.(принцип виртуальных перемещений). Условия равновесия голономных систем.

   Устойчивость по Ляпунову положения равновесия системы автономных дифференциальных уравнений. Понятие функции Ляпунова. Теоремы Ляпунова об устойчивости и асимптотической устойчивости. Теорема Четаева о неустойчивости. Теорема Лагранжа об устойчивости равновесия консервативных механических систем. Условие неустойчивости консервативных систем по квадратичной части потенциальной энергии.

   Асимптотическая устойчивость положения равновесия. Теорема Ляпунова об устойчивости по линейному приближению. Критерий Рауса–Гурвица. Влияние гироскопических и диссипативных сил на устойчивость равновесия. Условие Маиевского–Четаева устойчивости «спящего» волчка Лагранжа.

   Элементы теории катастроф. Кривая равновесий. Основные типы бифуркаций в динамических системах. Дивергенция и флаттер.

   Малые колебания консервативных систем вблизи устойчивого положения равновесия. Уравнение частот. Главные (нормальные) координаты. Общее решение. Случай кратных корней.

   Вынужденные колебания линейной стационарной системы под действием гармонических сил. Амплитудно-фазовая характеристика. Явление резонанса. Реакция линейной стационарной системы на негармоническое воздействие.

2. **Уравнения Гамильтона, вариационные принципы, интегральные инварианты**

   Переменные Гамильтона. Функция Гамильтона. Преобразование Лежандра. Теорема Донкина о преобразовании Лежандра. Канонические уравнения Гамильтона. Физический смысл функции Гамильтона для консервативной системы.

   Первые интегралы гамильтоновых систем. Скобки Пуассона. Теорема Якоби–Пуассона. Понижение порядка уравнений Гамильтона в случае циклических координат и для обобщенно консервативных систем. Уравнения Уиттекера. Понижение порядка уравнений Лагранжа при наличии циклических координат при помощи уравнений Рауса.

Действие по Гамильтону. Вариация действия по Гамильтону Вариационный принцип Гамильтона.

Интегральные инварианты Пуанкаре–Картана и Пуанкаре. Обратные теоремы теории интегральных инвариантов. Теорема Лиувилля об инвариантности фазового объема гамильтоновой системы. Теорема Ли Хуа-чжуна об интегральных инвариантах первого порядка гамильтоновых систем.

3. Канонические преобразования. Уравнение Гамильтона–Якоби

Канонические преобразования. Критерий каноничности.

Производящая функция и валентность канонического преобразования. Свободные канонические преобразования. Правило преобразования гамильтонианов при канонических преобразованиях. Фазовый поток гамильтоновых систем как однопараметрическое семейство канонических преобразований.

Уравнение Гамильтона–Якоби. Полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби и его использование в задаче интегрирования уравнений движения гамильтоновой системы. Случаи разделения переменных.

Дополнительные темы к программе повышенного уровня

1. Электромеханические аналогии

Электрические аналоги кинетической энергии, потенциальной энергии и диссипативной функции Релея.

Уравнения Лагранжа для электрических цепей и электромеханических систем.

2. Теорема Нётер

Замена переменных в уравнениях Лагранжа. Теорема Нетер. Связь законов сохранения (первых интегралов) со свойствами пространства и времени.

3. Переменные действие–угол и адиабатические инварианты

Переменные действие–угол для системы с одной степенью свободы. Понятие о переменных действие–угол для систем с n степенями свободы.

Адиабатические инварианты.

4. **Канонические преобразования в теории возмущений**
   Вариация постоянных в задачах механики.
   Канонические замены переменных, близкие к тождественным.
   Классическая теория возмущений для систем, близких к интегрируемым. Малые знаменатели.

Литература

1. *Айзерман М.А.* Классическая механика. – М.: Наука, 1980, 2005.
2. *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике. – 3-е изд. – М.: Физматлит, 2001.
3. *Журавлёв В.Ф.* Основы теоретической механики. – 2-е изд. – М.: Физматлит, 2001; 3-е изд. – М.: Физматлит, 2008.
4. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. – М.: Наука, 1990.
5. *Яковенко Г.Н.* Краткий курс аналитической динамики. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004.
6. *Трухан Н.М.* Теоретическая механика. Методика решения задач: учеб. пособие. – М.: МФТИ, 2010.
7. Сайт кафедры теоретической механики МФТИ. http://teormech.fizteh.ru

З А Д А Н И Я

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи с 24 по 29 марта 2014 г.)

Контрольная работа № 1 с 17 по 22 марта

1. **Равновесие. Принцип виртуальных перемещений.**
   С – 14.6, 14.10, 14.16 (n = 1), 14.34

2. **Устойчивость равновесия консервативных систем**
   С – 15.10, 15.16, 15.18, 15.24 (в условиях задачи 15.24 построить кривую равновесий и бифуркационную диаграмму)

3. **Асимптотическая устойчивость диссипативных систем:**
   С – 17.7, 17.11(в), 17.20

Т1. Доказать асимптотическую устойчивость нулевого решения ($x = 0, y = 0$) системы уравнений

$$\dot{x} = 3y^2 - x^3, \ \dot{y} = -y - xy .$$

4. **Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости движения**

T2. Тонкий однородный диск радиуса R вращается вокруг вертикального диаметра с угловой скоростью ω. Нижняя точка диска соприкасается с неподвижной абсолютно гладкой горизонтальной плоскостью. Показать, что если $\omega^2 \geq 4g/R$, то вращение диска устойчиво.

T3. Уравнения возмущенного движения некоторой материальной системы имеют вид

$$\frac{dx_1}{dt} = -2x_2 - x_1(x_1^{2014} + x_2^{2014}),$$
$$\frac{dx_2}{dt} = 2x_1 - x_2(x_1^{2014} + x_2^{2014}).$$

Доказать асимптотическую устойчивость невозмущенного движения.

Указание. Воспользоваться теоремой Ляпунова об асимптотической устойчивости, приняв в качестве функции Ляпунова функцию $V = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$..

T4. Уравнения возмущенного движения некоторой материальной системы имеют вид

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 x_2,$$
$$\frac{dx_2}{dt} = x_1^2 + x_2^2.$$

Доказать неустойчивость невозмущенного движения.

Указание. Воспользоваться теоремой Четаева о неустойчивости, приняв в качестве функции Четаева функцию $V = x_1 x_2$, а в качестве области $V > 0$ – область $x_1 > 0, x_2 > 0$.

5. **Малые колебания консервативных систем:**

C – 16.64, 16.9, 16.47, 16.68, 16.70

6. **Вынужденные колебания:**

C –18.7, 18.25, 18.37, 18.43(д)

Т5. В условиях задачи 18.34, положив $mg = cl$ и массу точки равной $m/2$, найти движение системы при $p = \sqrt{g/(2l)}$. В начальный момент система покоится, пружина не деформирована, маятник занимает вертикальное положение.
Указание. При решении использовать нормальные координаты.

Т6. Галопирование балки с квадратным сечением, помещенной в поток ровного ветра, описывается в первом нелинейном приближении уравнением

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + cy = V^2\left(a_1\frac{\dot{y}}{V} - a_3\frac{\dot{y}^3}{V^3}\right),$$

где V – скорость ветра. Исследовать устойчивость нулевого положения равновесия в зависимости от V и определить сценарий бифуркации при потере устойчивости (оценить амплитуду колебаний).
Указание. Перейти к обобщенным полярным координатам по формулам

$$y = r\sin\varphi,\ \dot{y} = kr\cos\varphi, \quad k = \sqrt{c/m}.$$

Получить выражение для $dr/d\varphi$. Оценку амплитуды r_0 получить из условия

$$\int_0^{2\pi}(dr/d\varphi)d\varphi = 0.$$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи с 19 по 24 мая 2014 г.)

Контрольная работа с 12 по 17 мая

1. **Функция Гамильтона и канонические уравнения**
   С – 19.7, 19.14, 19.19, 19.41, 19.51, 19.67
2. **Первые интегралы. Скобки Пуассона**
   С – 20.25, 20.33, 20.28(в), 20.57
3. **Принцип Гамильтона**
   С – 21.5, 21.23, 21.26, 21.31
4. **Интегральные инварианты**
   С – 22.5, 22.17, 22.22, 22.24, 22.29
5. **Канонические преобразования**

С – 23.7, 23.18, 23.35(в), 23.47, 23.99, 23.109

6. **Уравнение Гамильтона–Якоби**
   С – 24.5, 24.13, 24.41, 24.57, 24.86

ВАРИАТИВНАЯ ЧАСТЬ ЗАДАНИЯ

1. **Электромеханические аналогии**
   С. 13.4(б), 13.33; М. 48.52

2. **Теорема Нётер**
   Т7. При помощи теоремы Нётер найти первые интегралы уравнений движения волчка из задачи С. 12.56.

   Т8. В системе, уравнение движения которой задается функцией Лагранжа $L = -\sqrt{1-(dq/dt)^2}$, делается переход к новым переменным q_*, t_* по формулам (s - параметр)

   $$q = ch(sq_*) + sh(st_*)\,, \quad t = sh(sq_*) + ch(st_*)\,.$$

   Опираясь на теорему Нётер, указать первый интеграл, отвечающий указанному преобразованию.

   Т9. Заряженная частица массы m движется в плоскости Oxy в силовом поле диполя. Потенциальная энергия частицы задается формулой

   $$\Pi = kx(x^2 + y^2)^{-3/2},$$

   где k – постоянная величина. Делается преобразование подобия

   $$x = \alpha\, x_*, \quad y = \alpha\, y_*, \quad t = \beta\, t_*.$$

   Подобрать постоянные коэффициенты α, β так, чтобы это преобразование не изменяло функцию Лагранжа. При помощи теоремы Нётер указать соответствующий интеграл уравнений движения частицы.

3. **Переменные действие–угол и адиабатические инварианты**
   Т10. Материальная точка единичной массы совершает одномерное колебательное движение в потенциальном силовом поле. Потенциальная энергия точки $\Pi(q)$ задается формулой

   $\Pi = tg^2(\alpha q)$ (α - постоянный положительный параметр).

   Показать, что в переменных действие-угол I, w функция Гамильтона точки записывается в виде

$$H = \frac{1}{2}(\alpha I + \sqrt{2})^2 - 1.$$

Т11. Как изменяются частота и амплитуда колебаний точки из задачи Т10, если параметр α – медленно возрастающая функция времени ($\alpha = \alpha(\varepsilon t)$).

4. Канонические преобразования в теории возмущений

Т10. Используя производящую функцию $S_1 = q\tilde{p} + \varepsilon(aq^3\tilde{p} + bq\tilde{p}^3)$, задающую унивалентное (c= 1) каноническое преобразование, показать, что выбором постоянных коэффициентов a и b можно распорядиться так, что в новых переменных функция Гамильтона

$$H(q, p) = \frac{1}{2}(q^2 + p^2) + \varepsilon\beta q^3$$

будет иметь вид

$$\tilde{H}(q, p) = \frac{1}{2}(\tilde{q}^2 + \tilde{p}^2) + \varepsilon\gamma(\tilde{q}^2 + \tilde{p}^2)^2 + O(\varepsilon^2).$$

Найти величину γ.

Т11. Движение математического маятника в окрестности его нижнего положения при наличии вертикальных гармонических колебаний точки подвеса малой амплитуды может быть описано приближенной линейной системой канонических уравнений, задаваемой функцией Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}\omega(q^2 + p^2) + \varepsilon q^2 \cos t.$$

Найти близкое к тождественному унивалентное каноническое преобразование, максимально упрощающее часть гамильтониана порядка ε. Рассмотреть случаи $\omega \neq 1/2$ и $\omega = 1/2$.

С – Пятницкий Е.С., Трухан Н.М., Ханукаев Ю.И., Яковенко Г.Н. Сборник задач по аналитической механике. – 2-е изд. – М.: Наука, 1996; 3-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.

М – Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. – 36-е изд. – М.: Наука, 1986; 40-е изд. – СПб: Лань, 2003.

Усл. печ.л. 0,5. Тираж 955 экз.