Лекция 1

Исследование движения в консервативной системе с одной степенью свободы

1. Основные понятия. *Консервативной системой с одной степенью свободы мы будем называть систему, описываемую дифференциальным уравнением*

$$\frac{d^2x}{dt^2}+f(x)=0. \qquad (1)$$

Функция $f(x)$ в (1) в дальнейшем предполагается гладкой.

Одним из главных свойств консервативной системы является наличие первого интеграла – интеграла энергии

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\Pi(x)=C. \qquad (2)$$

Функция $\Pi(x)$ в выражении (2) интерпретируется как потенциальная энергия системы:

$$\Pi(x)=\int_0^x f(x')\,dx'.$$

Постоянную C называют постоянной энергии.

2. Метод фазовой плоскости. Уравнение (1) эквивалентно системе двух дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=\upsilon, \qquad (3)$$
$$\frac{d\upsilon}{dt}=-f(x).$$

О.: *Фазовой плоскостью уравнения (1) называют плоскость с координатами* (x,υ).

Решение системы (3) описывает движение фазовой точки $(x(t),\upsilon(t))$ по фазовой плоскости.

О.: *Фазовой кривой называют кривую*

$$\left\{(x(t),\upsilon(t)),\ t\in\mathbf{R}^1\right\}$$

Фазовая кривая принадлежит множеству уровня энергии

$$\frac{\upsilon^2}{2}+\Pi(x)=C. \qquad (4)$$

Разрешая соотношение (4) относительно υ, получим:

$$\upsilon=\pm\sqrt{2(C-\Pi(x))}. \qquad (5)$$

Если известно выражение для потенциальной энергии $\Pi(x)$, формула (5) позволяет построить линии уровня интеграла энергии (рис. 1). Линии уровня состоят из одной, двух или большего количества ветвей. Располагая линиями уровня, можно сделать заключение о поведении фазовых траекторий («расставить стрелки»).

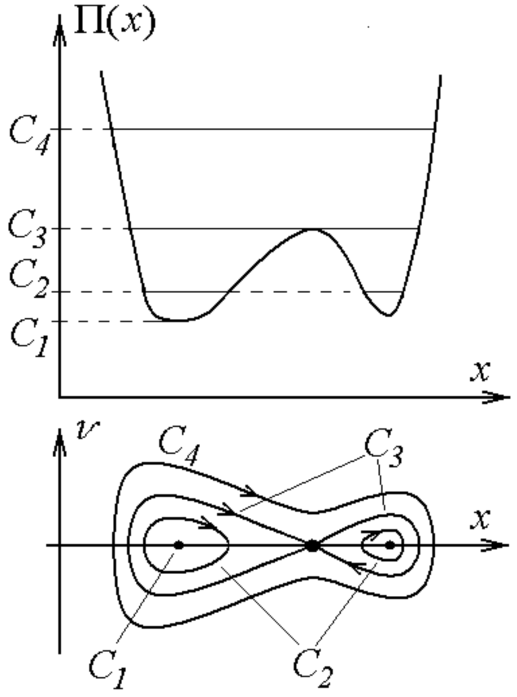

Рис. 1

Пример: потенциал с двумя ямами.

Критический уровень энергии – уровень, содержащий положения равновесия.

Сепаратриса – кривая, разделяющая области с разным поведением фазовых траекторий.

Вопрос: из какого количества фазовых кривых состоит сепаратриса на рис. 1?

Пример: линейный осциллятор.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \tag{6}$$

Уравнение (6) допускает интеграл энергии

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{\omega^2 x^2}{2} = C. \tag{7}$$

Выражение для фазовых траекторий

$$\upsilon = \pm\sqrt{2\left(C - \frac{\omega^2 x^2}{2}\right)}. \tag{8}$$

Фазовые кривые являются эллипсами (рис. 2). Начало координат – положение равновесия.

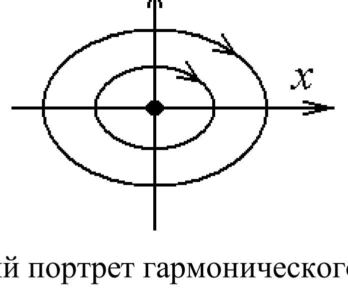

Рис. 2. Фазовый портрет гармонического осциллятора

Пример: математический маятник

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\sin x=0. \qquad (9)$$

В этом случае потенциальная энергия $\Pi(x)=-\cos x$.

Заметим, что с физической точки зрения положения маятника, различающие на $2\pi k\,(k=\pm 1,2,\ldots)$, эквиваленты. Фазовым пространством системы является цилиндр $\mathbf{S}^1\times\mathbf{R}^1$(рис. 3).

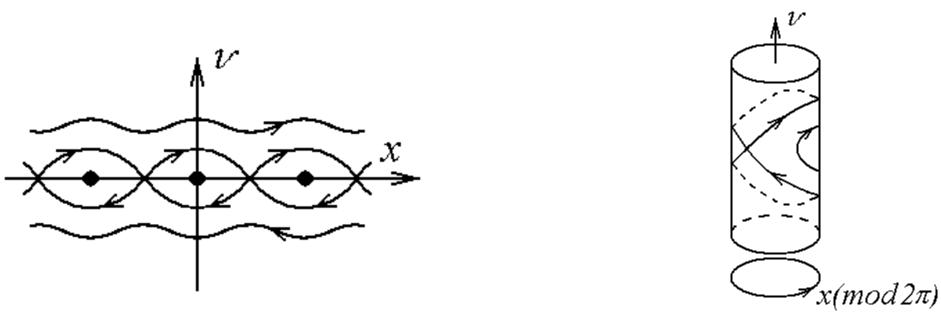

Рис. 3. Фазовый портрет математического маятника

Пример. Уравнение Дюффинга : $f(x)$ - кубический полином, удовлетворяющий условию $f(-x)=-f(x)$. Существуют два вида уравнения Дюффинга:

Вид А.

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x+\beta x^3=0. \qquad (10)$$

Вид В.

$$\frac{d^2x}{dt^2}-x+\beta x^3=0. \qquad (11)$$

Интеграл энергии для уравнения Дюффинга

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{x^2}{2}+\frac{\beta x^4}{4}=C \text{ (вид А)} \qquad (12)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-\frac{x^2}{2}+\frac{\beta x^4}{4}=C \text{ (вид В)}$$

Задача 1. Располагая графиком потенциальной энергии, нарисовать фазовый портрет (рис. 4).

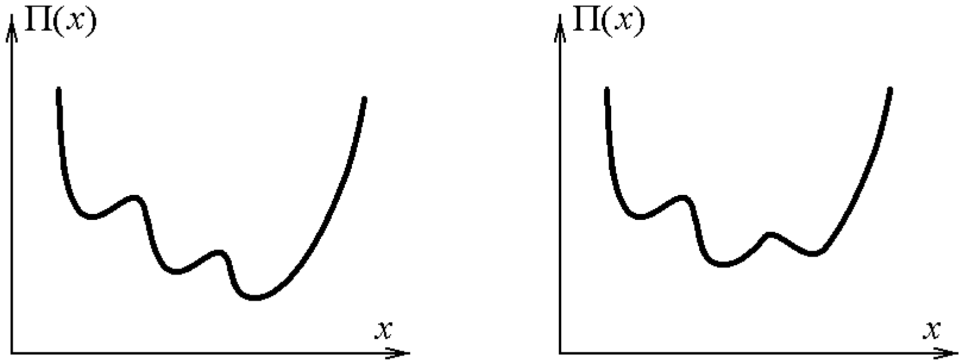

Рис. 4. Графики $\Pi(x)$ для упражнений по построению фазовых портретов

Задача 4. Нарисовать фазовый портрет математического маятника при наличии постоянного крутящего момента:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\sin x = M .$$

Задача 3. Нарисовать фазовый портрет системы, у которой потенциальная энергия задана формулой

а) $\Pi(x)=x\sin x$; б) $\Pi(x)=\dfrac{\sin x}{x}$; в) $\Pi(x)=\sin^2 x$.

Задача 4. Нарисовать фазовый портрет системы, в уравнении движения которой функция $f(x)$ задана формулой

а) $f(x)=x\sin x$; б) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$; в) $f(x)=\sin^2 x$.

Задача 5. Описать потенциал $\Pi(x)$, при движении в котором изменение скорости описывается графиком, представленном на рис. 5.

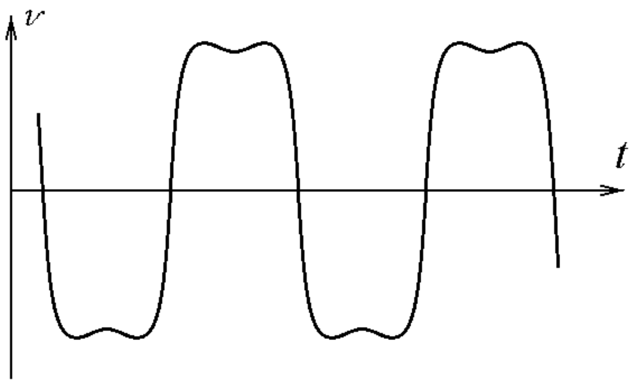

Рис. 5. В каком потенциале $\Pi(x)$ происходит движение?

3. Аналитические аспекты. Уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{2(C - \Pi(x)} \tag{13}$$

интегрируется методом разделения переменных:

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{2(C - \Pi(x))}}. \tag{14}$$

Воспользовавшись соотношением (14), нетрудно определить, например, что замкнутая фазовая кривая, пересекающая ось x в точках x_1, x_2 соответствует периодическому движению системы с периодом

$$T = 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{2(C - \Pi(x))}} \tag{15}$$

В том случае, когда функция $f(x)$ является нечетной ($f(-x) = -f(x)$), линии уровня интеграла энергии (4) в дополнении к симметрии относительно горизонтальной оси обладают симметрией относительно вертикальной оси. В окрестности устойчивого положения равновесия $x \equiv 0$ линии уровня буду овалами, пересекающими горизонтальную ось в точках $x_1 = -A, x_2 = A$, где A - амплитуда колебательного движения (максимальное отклонение от положения равновесия). Период колебаний с амплитудой A в системе с нечетной восстанавливающей силой вычисляется по формуле

$$T = 4\int_0^A \frac{dx}{\sqrt{2[\Pi(A) - \Pi(x)]}} \tag{16}$$