Лекция 2

Применение эллиптических функций для интегрирования уравнений нелинейных колебаний

«Естественным» способом описания линейных колебаний были тригонометрические функции $\sin x$, $\cos x$. Для описания нелинейных колебаний требуются более сложные специальные функции.

1. **Эллиптические интегралы. О.:** *Интеграл*

$$u = F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\xi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \xi}} \tag{1}$$

называется эллиптическим интегралом I-го рода.

Величина k в выражении (1) носит название параметра эллиптического интеграла. Если $|\varphi| \le \frac{\pi}{2}$, то справедливо соотношение

$$F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\xi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \xi}} = \int_0^{\sin\varphi} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} .$$

Графики функции $F(\varphi, k)$ для разных значений k приведены на рис. 2.1. Очевидно, что при $k=0$ график является прямой $u=\varphi$. При $k=1$ значение интеграла (1) стремится к $\pm\infty$ при $\varphi \to \pm\frac{\pi}{2}$.

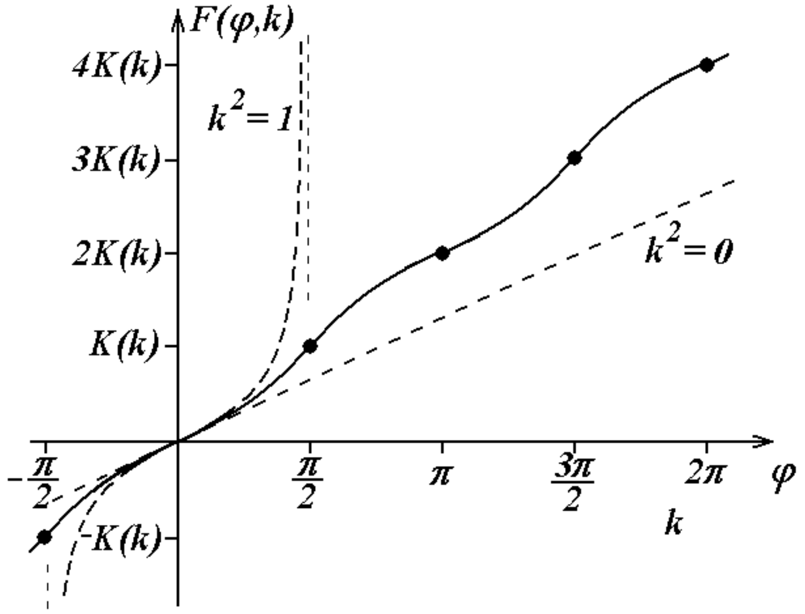

Рис. 2.1. График функции $F(\varphi, k)$

В частном случае $\varphi = \frac{\pi}{2}$ интеграл (1) называют *полным эллиптическим интегралом I-го рода:*

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\xi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \xi}} \qquad (2)$$

Рис. 2.2 демонстрирует, каким образом значение интеграла (2) зависит от значения модуля k. При $k \to 1$ интеграл $K(k) \to \infty$.

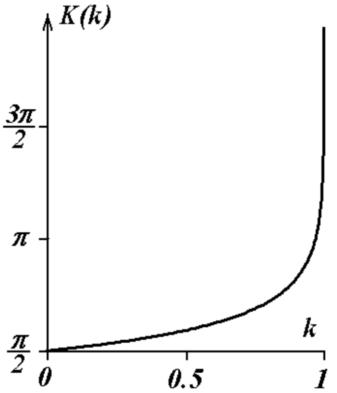

Рис. 2.2. График $K(k)$

Значение полного эллиптического интеграла I-го рода равно сумме бесконечных рядов

$$K(k) = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \ldots\right\}$$

и

$$K(k) = \ln\frac{4}{k'} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\ln\frac{4}{k'} - \frac{2}{1\cdot 2}\right) k'^2 +$$
$$+ \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \left(\ln\frac{4}{k'} - \frac{2}{1\cdot 2} - \frac{2}{3\cdot 4}\right) k'^4 + \ldots$$

Здесь $k' = \sqrt{1-k^2}$ - дополнительный модуль.

2. **Эллиптические функции. О.:** *Функция «амплитуда φ»*

$$\varphi = \mathrm{am}\,u \qquad (3)$$

является обратной к функции $F(\varphi, k)$.

Легко устанавливается, что

$$\frac{d\varphi}{du} = \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^{-1}_{\varphi = \mathrm{am}\,u} = \sqrt{1-k^2 \sin^2(\mathrm{am}\,u)}\,. \qquad (4)$$

О.: *Эллиптическими функциями Якоби называют эллиптический синус*

$$z = \mathrm{sn}(u,k) = \sin(\mathrm{am}\,u), \qquad (5)$$

эллиптический косинус

$$z = \mathrm{cn}(u,k) = \cos(\mathrm{am}\,u) \qquad (6)$$

и функцию «дельта u»

$$z = \mathrm{dn}(u,k) = \sqrt{1-k^2\,\mathrm{sn}^2(u,k)}\,. \qquad (7)$$

Основные свойства эллиптических функций:

$$\mathrm{sn}^2 u+\mathrm{cn}^2 u=1, \quad \mathrm{dn}^2 u+k^2\,\mathrm{sn}^2 u=1, \tag{8}$$

$$\frac{d}{du}\mathrm{sn}\,u=\mathrm{cn}\,u\cdot\mathrm{dn}\,u\,,$$

$$\frac{d}{du}\mathrm{cn}\,u=-\mathrm{sn}\,u\cdot\mathrm{dn}\,u\,,$$

$$\frac{d}{du}\mathrm{dn}\,u=-k^2\,\mathrm{sn}\,u\cdot\mathrm{cn}\,u.$$

Первые два соотношения следуют из определения эллиптических функций, остальные устанавливаются непосредственным вычислением производной. Например:

$$\frac{d}{du}\mathrm{sn}\,u=\frac{d}{du}\sin(\mathrm{am}\,u)=\cos(\mathrm{am}\,u)\cdot\frac{d}{du}\mathrm{am}\,u= \tag{5}$$

$$=\cos(\mathrm{am}u)\cdot\sqrt{1-k^2\sin^2(\mathrm{am}u)}=\mathrm{cn}(\mathrm{am}u)\cdot\mathrm{dn}\,u\,.$$

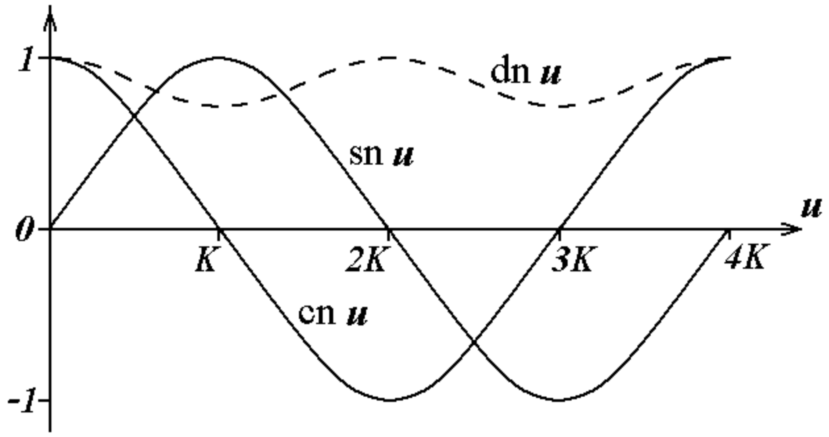

Рис. 2. 3. Поведение функций $\mathrm{sn}\,u, \mathrm{cn}\,u$ и $\mathrm{dn}\,u$

На рис. 2.3 изображено типичное поведение эллиптических функций ($0<k<1$). Функции $\mathrm{sn}\,u$ и $\mathrm{cn}\,u$ являются периодическими с периодом $4K(k)$, у функции $\mathrm{dn}\,u$ период равен $2K(k)$. Следует отметить, что в отличие от обычных тригонометрических графики функций $\mathrm{sn}\,u$ и $\mathrm{cn}\,u$ не переходят друг в друга при сдвиге на четверть периода.

В случаях $k=0$ и $k=1$ эллиптические функции вырождаются в элементарные. Если $k=0$, то

$$\mathrm{sn}\,u=\sin u\,, \quad \mathrm{cn}\,u=\cos u\,, \quad \mathrm{dn}\,u\equiv 1.$$

При $k=1$ эллиптические функции оказываются непериодическими:

$$\mathrm{sn}\,u=\mathrm{th}\,u\,, \quad \mathrm{cn}\,u=\mathrm{dn}\,u=\frac{1}{\mathrm{ch}\,u}\,.$$

3. **Решение уравнения Дюффинга в эллиптических функциях.** Начнем с рассмотрения уравнения Дюффинга типа А:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x + \beta x^3 = 0. \tag{6}$$

Пусть $\beta > 0$. Из проведенного на предыдущей лекции анализа поведения траекторий на фазовой плоскости следует, что в этом случае все нетривиальные решения имеют колебательный характер. Будем разыскивать решение в виде

$$x(t) = A\mathrm{cn}(u,k), \quad u = \sigma(t+t_0) \tag{7}$$

и попытаемся установить, каким образом величины k и σ зависят от амплитуды A. Дифференцируя $x(t)$, найдем:

$$\frac{dx}{dt} = -\sigma A\mathrm{sn}(u,k)\cdot\mathrm{dn}(u,k), \tag{8}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\sigma^2 A\mathrm{cn}\,u\cdot\mathrm{dn}^2 u + \sigma^2k^2A\mathrm{cn}\,u\cdot\mathrm{sn}^2 u =$$

$$= -\sigma^2 A\mathrm{cn}\,u\left[1-k^2+k^2\mathrm{cn}^2 u\right] + \sigma^2k^2A\mathrm{cn}\,u\left[1-\mathrm{cn}^2 u\right] =$$

$$= -\sigma^2 A\left[1-2k^2\right]\mathrm{cn}u - 2\sigma^2k^2A\mathrm{cn}^3 u.$$

Подстановка полученных выражений для $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{d^2x}{dt^2}$ в уравнение (6) приводит к соотношению

$$-\sigma^2 A\left[1-2k^2\right]\mathrm{cn}u - 2\sigma^2k^2A\mathrm{cn}^3 u + A\mathrm{cn}\,u + \beta A^3\mathrm{cn}^3 u = 0. \tag{9}$$

Это соотношение будет тождеством при условии

$$-\sigma^2\left[1-2k^2\right]+1=0,\ -2\sigma^2k^2+\beta A^2=0. \tag{10}$$

Формулы (10) позволяют установить интересующую нас связь амплитуды A с параметрами k и σ:

$$k^2 = \frac{\beta A^2}{2(1+\beta A^2)},\quad \sigma^2 = 1+\beta A^2. \tag{11}$$

Принимая во внимание, что период функция $\mathrm{cn}u$ равен $4K(k)$, запишем выражение для периода колебаний

$$T = \frac{4K(k)}{\sigma}. \tag{12}$$

Предположим теперь, что $\beta < 0$. В этом случае амплитуда колебательных решений удовлетворяет условию

$$A < A_* = |\beta|^{-1/2}. \tag{13}$$

Колебательное решение будем разыскивать в виде

$$x(t) = A\mathrm{sn}(u,k), \quad u = \sigma(t+t_0). \tag{14}$$

Дифференцируя $x(t)$, найдем:

$$\frac{dx}{dt} = \sigma A\mathrm{cn}(u,k)\cdot\mathrm{dn}(u,k), \tag{15}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\sigma^2 A\mathrm{sn}u\cdot\mathrm{dn}^2 u - \sigma^2k^2A\mathrm{cn}^2 u\cdot\mathrm{sn}u =$$

$$=-\sigma^2 A\,\mathrm{sn}u+\sigma^2 k^2 A^2\,\mathrm{sn}^3 u-\sigma^2 k^2 A\,\mathrm{sn}u+\sigma^2 k^2 A\,\mathrm{sn}^3 u=$$

$$=-\sigma^2 A\left(1+k^2\right)\mathrm{sn}u+2\sigma^2 k^2 A\,\mathrm{sn}^3 u\,.$$

Подстановка выражений для $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{d^2x}{dt^2}$ в исходное дифференциальное уравнение (6) приводит к соотношению

$$-\sigma^2 A\left(1+k^2\right)\mathrm{sn}u+2\sigma^2 k^2 A\,\mathrm{sn}^3 u+A\,\mathrm{sn}u+\beta A^3\,\mathrm{sn}^3 u=0\,. \qquad (16)$$

Соотношение (16) будет тождеством при условии

$$k^2=-\frac{\beta A^2}{2+\beta A^2}\,,\quad \sigma^2=1+\frac{\beta A^2}{2}\,. \qquad (17)$$

Рассмотрим колебательные решения с амплитудами, близкими к предельному значению A_*. На фазовом портрете этим решениям соответствуют замкнутые фазовые траектории, лежащие в окрестности сепаратрисного контура (рис. ?.?). Из формул (17) следует, что при $A\to A_*$

$$k\to 1,\quad \sigma\to\frac{1}{\sqrt{2}}\,. \qquad (18)$$

Следовательно, период колебательных решений

$$T=\frac{4K(k)}{\sigma}\to\infty \qquad (19)$$

при $A\to A_*$.

Сепаратрисный контур на рис. ?.? состоит из четырех фазовых траекторий: из двух вырожденных траекторий – точек $(-A_*,0)$ и $(A_*,0)$, отвечающих неустойчивым стационарным решениям $x\equiv\pm A_*$, и двух траекторий, соответствующих финитным апериодическим решениям

$$x(t)=\pm A_*\,\mathrm{th}\frac{1}{\sqrt{2}}(t+t_0)\,. \qquad (20)$$

В заключение можно отметить, что ситуация, когда семейство периодических решений, выражаемых через эллиптические функции, включает в качестве некоторого предела апериодические решение, записываемые с помощью элементарных функций, является достаточно типичной.

Займемся теперь поиском решений уравнения Дюффинга типа B:

$$\frac{d^2x}{dt^2}-x+\beta x^3=0\,. \qquad (21)$$

Колебательные решения существуют только тогда, когда $\beta>0$. Решения, в которых значение интеграла энергии h лежит в интервале $\left(-\frac{1}{4\beta},0\right)$, соответствуют колебаниям относительно одного из двух устойчивых положений равновесия $x_\pm=\pm\frac{1}{\sqrt{\beta}}$. Непосредственной подстановкой в (21) можно убедиться, что эти решения имеют вид

$$x(t)=\pm A\,\mathrm{dn}(u,k),\quad u=\sigma(t+t_0)\,. \qquad (22)$$

Здесь

$$\frac{1}{\sqrt{\beta}} < A < \sqrt{\frac{2}{\beta}}\,, \tag{22}$$

$$k = \sqrt{2\left(1 - \frac{1}{\beta A^2}\right)}\,, \quad \sigma = \sqrt{\frac{\beta}{2}}A\,.$$

Колебательным решениям с положительным значением интеграла энергии соответствуют фазовые траектории, охватывающие сепаратрису, лежащую на критическом уровне $h = 0$ (рис. ?.?). В этом случае

$$x(t) = A\,\mathrm{cn}(u,k)\,, \quad u = \sigma(t + t_0)\,, \tag{23}$$

где

$$A > \sqrt{\frac{2}{\beta}}\,, \tag{24}$$

$$k^2 = \frac{\beta A^2}{2(\beta A^2 - 1)}\,, \quad \sigma^2 = \beta A^2 - 1\,.$$

4. Решение уравнения математического маятника в эллиптических функциях. Уравнение, описывающее динамику математического маятника, имеет вид

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \sin x = 0 \tag{25}$$

и допускает интеграл энергии

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \cos x = h \tag{25}$$

Значение интеграла энергии позволяет определить тип движения маятника. Если $h = -1$, то маятник находится в состоянии устойчивого равновесия. В случае $-1 < h < 1$ движение носит колебательный характер. Значение интеграла $h = 1$ возможно в неустойчивом (верхнем) положении равновесия или в асимптотическое движение, в котором это неустойчивое положение равновесия является пределом при $t \to \pm\infty$. При выполнении условия $h > 1$ движение маятника является вращением.

Колебательные и вращательные решения уравнения можно получить в эллиптических функциях.

Начнем с колебательных решений. Амплитуда колебаний маятника A связана со значением интеграла энергии соотношением

$$h = -\cos A\,. \tag{26}$$

Принимая во внимание (26), получим, что в колебательном движении

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2(\cos x - \cos A) = \sin^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = k^2 - \sin^2\frac{x}{2}\,, \tag{27}$$

где $k = \sin\dfrac{A}{2}$.

Для построения интересующего нас решения воспользуемся методом разделения переменных:

$$\frac{dx}{\sqrt{k^2-\sin^2\frac{x}{2}}}=\pm dt\,. \tag{28}$$

В уравнении (28) вместо переменной x введем новую переменную ξ, связанную с переменной x соотношением

$$\sin\frac{x}{2}=k\sin\frac{\xi}{2}. \tag{29}$$

После несложных преобразований уравнение приобретает вид, позволяющий проинтегрировать его в эллиптических функций:

$$\frac{d\xi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\xi}}=dt \Rightarrow \xi=\mathrm{am}(t+t_0) \tag{30}$$

Отсюда следует, что поведение переменной x в колебательных решениях описывается формулой

$$x=2\arcsin\left[k\,\mathrm{sn}(t+t_0)\right] \tag{31}$$

Период колебательного движения

$$T=4K(k)\,. \tag{32}$$

Займемся теперь вращательными движениями. Легко удостовериться, что во вращательном движении

$$\frac{dx}{dt}=\pm\frac{2}{k}\sqrt{1-k^2\sin^2\frac{x}{2}}\,, \tag{33}$$

где $k^2=\dfrac{2}{h+1}$. Выбор знака в (33) определяется направлением вращения маятника.

Полезной характеристикой вращательного движения является угловая скорость маятника в момент прохождения нижнего (устойчивого) положения равновесия:

$$\Omega=\left(\frac{dx}{dt}\right)_{x=0(\mathrm{mod}\,2\pi)}. \tag{34}$$

С h и k величина Ω связана соотношениями

$$\Omega^2=2(h+1)\,,\; k=\frac{2}{|\Omega|}\,. \tag{35}$$

Интегрируя (33) методом разделения переменных, получим

$$\frac{\Omega t}{2}=\int_0^{x/2}\frac{d\xi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\xi}}=F\left(\frac{x}{2},k\right). \tag{36}$$

Из уравнения (36) следует, что во вращательном движении

$$x=2\,\mathrm{am}\left(\frac{\Omega t}{2}\right). \tag{36}$$